CAYENDO HACIA UN AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

Carlos A. Marín*

Colegio de Ciencias e Ingeniería, USFQ.

Resumen

Se describe lo que le sucedería a un observador al caer hacia el horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild, así como la existencia de una órbita circular estable alrededor de dicho agujero. También se analiza la posible producción de agujeros negros cuánticos en aceleradores de partículas como el LHC.

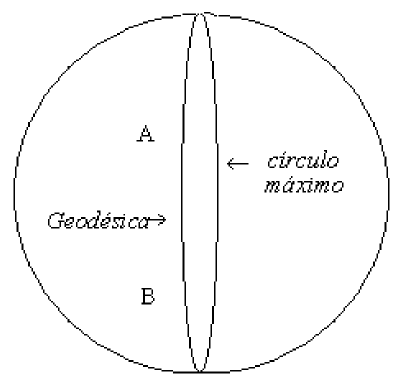
Palabras clave: agujeros negros, relatividad, geodésicas, aceleradores

1. Introducción

Entre 1908 y 1914, Albert Einstein realizó varios intentos sin éxito para obtener una teoría de la Gravitación que fuera compatible con la Teoría Especial de la Relatividad (1905). En 1915 finalmente lo logró y la llamó "*Teoría General de la Relatividad*"[1]. Para la formulación de la Teoría General de la Relatividad, Einstein se basó en el principio de equivalencia[2] entre la masa inercial (una medida de la resistencia que presenta un objeto a adquirir movimiento acelerado cuando se le aplica una fuerza) y la masa gravitacional (la masa del objeto en un campo gravitacional), el cual a su vez implica la imposibilidad de distinguir entre aceleración y gravedad. En palabras de Einstein[3]: "Un observador encerrado en un elevador no tiene forma de saber si el ascensor está en reposo (o moviéndose con movimiento rectilíneo uniforme) en un campo gravitacional estático o si está moviéndose en una región libre de gravitación con un movimiento acelerado que es mantenido por fuerzas que actúan sobre el elevador".Einstein se dio cuenta de que esta equivalencia sólo podía mantenerse si existía una conexión entre la fuerza gravitatoria y la geometría del espacio.

La genialidad de Einstein fue suponer que el espacio-tiempo no es plano, sino que está curvado debido a la distribución de materia y energía en él presente. Así por ejemplo, la Tierra se mueve alrededor del Sol en una órbita elíptica, no debido a la acción de una fuerza gravitacional, sino más bien debido al hecho de que el espacio-tiempo alrededor del Sol está curvado; entonces, la Tierra sigue la trayectoria más parecida a una recta en el espacio-tiempo curvo. La superficie de la tierra, por ejemplo, es una superficie curva bidimensional sin bordes o límites; sobre dicha superficie la distancia más corta entre dos puntos no es una línea recta sino un arco de círculo máximo llamado geodésica. Una geodésica es la distancia más corta entre dos puntos en una superficie curva. La distancia más corta entre dos aeropuertos (por ejemplo los aeropuertos de Quito y Boston) es una geodésica, de manera que si quisiéramos ir de Quito a Boston lo más rápidamente posible tendríamos que viajar a lo largo de la geodésica que conecta dichas ciudades.

En Relatividad General, las trayectorias de partículas sujetas a la acción de fuerzas no nulas se pueden interpretar como geodésicas en un espacio donde el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel (que determina la curvatura del espacio-tiempo) no es nulo. Esto es equivalente a introducir marcos de referencia acelerados, que se mueven de tal forma que las fuerzas que actúan sobre las partículas se anulan. Por lo tanto, el concepto de fuerza no necesita entrar en dinámica, y las trayectorias de las partículas se pueden interpretar como geodésicas cuyas propiedades vienen determinadas por las propiedades métricas del espacio-tiempo. Así, la gravedad tiene un origen puramente geométrico. La presencia de un campo gravitatorio modifica la estructura del espacio-tiempo. En la Teoría General de la Relatividad el espacio y el tiempo constituyen una estructura geométrica curvada en forma continua. La gravedad es una distorsión en la curvatura del espacio-tiempo.



La Teoría General de la Relatividad se resume en 14 ecuaciones: las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de las geodésicas[3]. Utilizando las ecuaciones de campo, se puede determinar la métrica del espacio-tiempo para una distribución dada de materia o energía (el tensor métrico describe la desviación del teorema de Pitágoras en un espacio curvo). Partiendo de estas ecuaciones, se pueden hacer

toda una serie de predicciones extraordinarias como por ejemplo: el avance del perihelio del planeta Mercurio, la desviación de la luz debido al campo gravitacional del Sol, el corrimiento al rojo gravitacional, el retardo de las señales de radar reflejadas en un planeta o satélite, la existencia de ondas gravitacionales (perturbaciones del campo gravitacional que se propagan a la velocidad de la luz), las lentes gravitacionales, la expansión del universo, etc.. Sin embargo, una de las predicciones más notables, y a la que dedicaremos el presente artículo es la existencia de objetos con propiedades muy extrañas denominados agujeros negros. En particular analiza-remos lo que le sucedería a un observador al caer hacia el horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild (un agujero negro esférico, sin carga eléctrica y desprovisto de movimiento de rotación).

2. Ecuaciones de campo de Einstein

La Teoría General de la Relatividad se resume en 14 ecuaciones. Las ecuaciones de campo de Einstein (que representan en total 10 ecuaciones escritas en forma tensorial)[2,3,4,5]:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (2.1)$$

y la ecuación de las geodésicas (cuatro ecuaciones):

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\left(\frac{dx^\rho}{ds}\right)\left(\frac{dx^\sigma}{ds}\right)=0 \qquad (2.2)$$

En *(2.1)* $R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$. A $R_{\mu\nu}$ se le denomina Tensor de Ricci, el cual se define a partir del Tensor de Riemann-Christoffel $\left(R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}\right)$ que determina la curvatura del espacio-tiempo: $R_{\mu\nu}=R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ donde

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma}=\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\right)-\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\Gamma^\mu_{\nu\rho}\right)+\Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}-\Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \qquad (2.3)$$

$g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico; este tensor determina las propiedades métricas del espacio-tiempo. $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-cantidad de movimiento (toma en cuenta todos los campos de materia y radiación presentes). G es la constante de gravitación universal; su valor es 6.673×10^{-11} N·m^2 / Kg^2. La constante c es la velocidad de la luz (trescientos mil kilómetros por segundo). Finalmente λ es la constante cosmológica introducida por Einstein en 1917. Es una medida de la contribución a la densidad de energía del universo debido a las fluctuaciones del vacío. Originalmente, Einstein la introdujo para evitar la expansión del universo, ya que él creía en un universo estático. Su valor es $|\lambda| < 3 \times 10^{-52}$ m^{-2}. El inverso de la raíz cuadrada del valor absoluto de la constante cosmológica mide la escala de distancia en la cual la geometría del espacio-tiempo es afectada por fluctuaciones del vacío; su valor coincide con el tamaño del universo visible: 10^{26} metros. En el marco de la Teoría General de la Relatividad la gravedad es una distorsión en la curvatura del espacio-tiempo.

En el marco de la Teoría General de la Relatividad la gravedad es una distorsión en la curvatura del espacio-tiempo. En *(2.2)* se representa el arco de curva, y satisface la relación

$$(ds)^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (2.4)$$

$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ son los símbolos de Christoffel de segunda especie

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left\{\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho}-\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha}\right\}$$

x^μ es el cuadrivector posición de la partícula. Las letras griegas como: μ, ν, ρ , etc.toman los valores 0, 1, 2 y 3. Hemos adoptado la convención de suma de Einstein en la que se suma sobre índices que se repiten dos veces. En coordenadas esféricas $x^0=ct,\ \ x^1=r,\ \ x^2=\theta$ y $x^3=\varphi$.

Nota: Las ecuaciones de campo *(2.1)* se pueden deducir a partir de la "Acción de Einstein-Hilbert"[5]:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[L_G-2kL_F+2\lambda\right] \qquad (2.5)$$

donde $L_G \equiv R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, L_F es el Lagrangiano de todos los otros campos de radiación o de materia., $g = \det(g_{ij})$, y $k = 8\pi Gc^{-4}$.

El tensor energía-cantidad de movimiento $T_{\mu\nu}$ está relacionado con el lagrangiano L_F a través de la ecuación:

$$T_{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial g^{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right)\right] \qquad (2.6)$$

3. Métrica de Schwarzschild

Para un campo gravitacional estático con simetría esférica las ecuaciones de campo de la Teoría General

de la Relatividad nos conducen al intervalo invariante (métrica de Schwarzschild)[2,3,5]:

$$(ds)^2 = \gamma(cdt)^2 - \gamma^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2(\sin\theta d\varphi)^2 \quad (3.1)$$

de manera que el tensor métrico covariante está dado por la matriz:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

y el tensor contravariante correspondiente es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

donde $\gamma = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$, M es la masa del objeto que genera el campo gravitacional, r, θ y φ son las coordenadas esféricas de un punto alrededor de la distribución de masa y t es el tiempo coordenado. El intervalo invariante se puede escribir en términos del tiempo propio como $ds = cd\tau$ El tiempo propio representa el intervalo de tiempo medido por un observador inmerso en la región del campo gravitacional. En cambio, el tiempo coordenado, es el intervalo de tiempo medido por un observador muy alejado de la fuente o las fuentes del campo gravitacional.

La ecuación (*3.1)* presenta dos singularidades. La primera singularidad se da cuando $\gamma = 0$, es decir cuando el radio es igual al radio de Schwarzschild:

$$r = r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.2)$$

que define la frontera o el horizonte de sucesos para un agujero negro. Esta es una singularidad matemática pues puede ser removida mediante una conveniente transformación de coordenadas, como la introducida por Eddington en 1924 o Finkelstein en 1958[6]:

$$\tilde{t} = t \pm \frac{r_s}{c}\ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right| \quad (3.3)$$

En efecto, con las transformaciones *(3.3)*, el intervalo invariante se escribe

$$(ds^2) = c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)(d\tilde{t})^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)(dr)^2 \mp 2c\frac{r_s}{r}d\tilde{t}\,dr - r^2(d\Omega)^2 \quad (3.4)$$

donde $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + Sin^2\theta\,(d\varphi)^2$ es el elemento de ángulo sólido elevado al cuadrado. La ecuación *(3.4)* no contiene más la singularidad en $r = r_s$. La otra singularidad se presenta en $r = 0$. En dicha singularidad, todas las leyes físicas conocidas fallan, y la curvatura del espacio-tiempo es infinita.

La primera transformación en *(3.3)* :

$$\tilde{t} = t + \frac{r_s}{c}\ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|$$

describe un agujero negro; mientras que la segunda:

$$\tilde{t} = t - \frac{r_s}{c}\ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|$$

representa lo que los físicos han denominado un "agujero blanco " emitiendo material a partir de una singularidad en $r = 0$ hacia el espacio-tiempo. No conocemos ningún proceso físico que pueda dar lugar a la formación de un objeto de estas características. La singularidad que diera origen al universo según el Modelo Standard de la Gran Explosión es un ejemplo de agujero blanco.

Si tenemos dos eventos que ocurren en un punto fijo del espacio, podemos escribir a partir de *(3.1)*:

$$(d\tau)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)(dt)^2 \quad (3.5)$$

o, tomando hasta términos de primer orden en $2GM/rc^2$

$$(dt)^2 = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right)(d\tau)^2 \quad (3.6)$$

Esta última ecuación nos dice que, para un observador distante, los intervalos de tiempo están dilatados.

4. Ecuación de conservación de la energía

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en un campo gravitacional (creado por una masa M) con simetría esférica en el plano $\theta = \pi/2$. Recordando que $ds = c\,d\tau$, la ecuación (*3.1)* se puede escribir en la forma (luego de multiplicar por m^2)

$$m^2c^2=\gamma m^2c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-m^2\gamma^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$
$$-r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2m^2 \qquad (4.1)$$

La ecuación de las geodésicas *(2.2),* se puede escribir para $\mu = 0$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2}+2\Gamma_{01}^0\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)=0 \qquad (4.2)$$

donde $\Gamma_{01}^0=\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{d\gamma}{dr}\right),\quad x^0=ct$ y $x^1=r.$

Los demás símbolos de Christoffel son iguales a cero.

Como $\left(\frac{d\gamma}{dr}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)=\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)$, *(4.2)* se reduce a:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\gamma\frac{dt}{d\tau}\right)=0 \qquad (4.3)$$

de donde obtenemos

$$\gamma\left(\frac{dt}{d\tau}\right)=constante \qquad (4.4)$$

Definiendo

$$E\equiv\gamma mc^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right) \qquad (4.5)$$

vemos que en virtud de la ecuación *(4.4),* E es una constante. En el caso en el que el campo gravitacional es muy débil, $\gamma\approx1$, y el lado derecho de la ecuación *(4.5)* se reduce a la expresión que nos da la energía de una partícula (energía en reposo + energía cinética) en el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad.

Para $\mu = 3$, la ecuación de las geodésicas se reduce a

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)=0 \qquad (4.6)$$

donde hemos usado:

$$\Gamma_{13}^3=\Gamma_{31}^3=\frac{1}{r};\Gamma_{23}^3=\Gamma_{32}^3=\cot\theta\,;$$

los demás símbolos de Christoffel son iguales a cero.

La ecuación *(4.6)* también se puede escribir:

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\frac{d\varphi}{d\tau}\right)=0 \qquad (4.7)$$

Si definimos

$$J\equiv r^2\frac{d\varphi}{d\tau} \qquad (4.8)$$

la ecuación *(4.7)* nos dice que J es una constante. Dicha constante J representa simplemente el momentum angular por unidad de masa de la partícula.

Introduciendo E en *(4.1),* podemos escribir:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\gamma mr^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2-\frac{GmM}{r}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{E^2}{mc^2}-mc^2\right)\equiv T=constante \qquad (4.9)$$

y puesto que $\frac{dr}{d\tau}=\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)=\frac{J}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)$

se tiene también,

$$\frac{1}{2}\frac{mJ^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}\gamma mr^2\left(\frac{J^2}{r^4}\right)-\frac{GmM}{r}=T \qquad (4.10)$$

La ecuación *(4.9)* es el equivalente, en el espacio-tiempo de Schwarzschild, de la ecuación clásica de conservación de la energía.

5. Cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild

Supongamos que una sonda espacial tripulada de masa, m, cae desde el reposo (desde una distancia muy grande), en dirección hacia un agujero negro de Schwarzschild (un agujero negro esférico, sin carga eléctrica y desprovisto de movimiento de rotación). Si la nave se mueve en dirección radial, en el plano $\theta = \pi/2$, y si por simplicidad hacemos $\varphi = 0^o$ en la ecuación *(4.9)*, puesto que $E = mc^2$, tenemos:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-\frac{GmM}{r}=0 \qquad (5.1)$$

donde M es la masa del agujero negro y τ es el tiempo propio medido por un observador a bordo de la nave. En términos del radio de Schwarzschild, r_s la ecuación *(5.1)* se puede escribir

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \frac{r_s}{r} \qquad (5.2)$$

Sacando la raiz cuadrada de la anterior expresión y haciendo separación de variables, obtenemos la siguiente integral:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau = -\int_0^r \left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} \frac{1}{c} dr$$

en la integral, hemos tomado un signo negativo al extraer la raiz cuadrada, debido a que el viaje es hacia el interior del agujero negro. τ_o es el tiempo propio en el cual la sonda alcanza el centro del agujero negro. El resultado de la integración es:

$$\tau(r) = \tau_o - \frac{2r}{3c}\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} \qquad (5.3)$$

de manera que en el radio de Schwarzschild r_s tenemos,

$$\tau(r_s) = \tau_o - \frac{2r_s}{3c}$$

de esta ultima relación podemos deducir que

$$\tau_o - \tau(r_s) = \frac{4GM}{3c^3} \qquad (5.4)$$

La ecuación *(5.3)* nos da el intervalo de tiempo, medido desde el horizonte de eventos, en el que la sonda alcanzaría el centro del agujero negro. Para un agujero negro con una masa igual a 10 veces la del Sol, la nave llegaría al centro del agujero negro en 6.6 x 10^{-5} segundos.

Veamos ahora como vería un observador muy alejado del horizonte de sucesos del agujero negro el descenso de la nave. Si partimos de la ecuación *(4.5)*, con $E = mc^2$, (debido a que la nave cae a partir del reposo desde una distancia muy grande), podemos escribir:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt = d\tau \qquad (5.5)$$

a partir de *(5.2)* y *(5.5)* (tomando el signo negativo al extraer la raiz cuadrada) tenemos:

$$dr = -c\left(\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}$$
$$d\tau = -c\left(\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt \qquad (5.6)$$

Haciendo separación de variables e integrando obtenemos:

$$t - t_o = -\frac{1}{c r_o^{1/2}} \int_0^r \frac{r^{3/2}}{(r - r_o)} dr \qquad (5.7)$$

que nos da

$$t = t_o + \frac{r_s}{c}\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_s}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} + \ln\left|\frac{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} + 1}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} - 1}\right|\right] \qquad (5.8)$$

donde t_o es el tiempo, visto por un observador muy distante, que se demora la sonda en alcanzar el centro del agujero negro. En el límite cuando r se aproxima al radio de Schwarzschild (r_s), el tiempo se hace infinito . La ecuación *(5.8)* nos dice que para un observador muy distante, el viaje de la nave hacia el horizonte de sucesos del agujero negro duraría toda la eternidad.

Si, $r >> r_s$

$$\ln\left|\frac{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} + 1}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} - 1}\right| \approx 2\left(\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}$$

que es muy pequeño, por lo que para grandes valores de r podemos escribir

$$t \approx t_o - \frac{2}{3}\left(\frac{r_s}{c}\right)\left(\frac{r}{r_s}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{r_s}{c}\right)\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} \qquad (5.9)$$

6. Orbita estable alrededor de un agujero negro de Schwarzschild

La ecuación correspondiente al arco de curva *(2.4)* se puede escribir de una forma más general (recordando que $ds = c\, d\tau$) como:

$$\kappa = g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \qquad (6.1)$$

$$\kappa = \begin{cases} 1\, para geodésicas cuasi - temporales \\ 0\, para geodésicas nulas (luz) \\ -1\, para geodésicas cuasi - espaciales \end{cases}$$

Donde $\dot{x}^{\mu} = \dfrac{dx^{\mu}}{d\tau}$

(τ es el tiempo propio). A κ se le conoce con el nombre de parámetro afin. Trabajando en un sistema de unidades en el que *c, G* son iguales a uno (para facilitarnos los cálculos), la ecuación (*6.1*) es, para la métrica de Schwarzschild:

$$\kappa = \gamma\left(\dot{t}\right)^2 - \gamma^{-1}\left(\dot{r}\right)^2 - r^2\left(\dot{\theta}\right)^2 - r^2 \sin^2\theta\left(\dot{\varphi}\right)^2 \qquad (6.2)$$

donde el punto sobre *t, r,* θ y φ significa que estamos derivando con respecto al tiempo propio.

Usando

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{m} = \gamma(\dot{t}),\ J = r^2(\dot{\varphi})$$

(ver ecuaciones *(4.5)* y *(4.8)*) y tomando $\theta = \pi/2$, la ecuación *(6.2)* nos conduce a:

$$(\dot{r})^2 = +\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\kappa+\frac{J^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \qquad (6.3)$$

que también se puede escribir:

$$\frac{1}{2}(\dot{r})^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\kappa+\frac{J^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \qquad (6.3a)$$

En esta última ecuación, podemos identificar al segundo término del lado izquierdo, como el potencial efectivo por unidad de masa (comparen dicha expresión con la ecuación clásica del movimiento radial de una partícula de masa unitaria y energía ½ ε^2):

$$V(r) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\kappa+\frac{J^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}\kappa - \frac{M}{r}\kappa + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{MJ^2}{r^3} \qquad (6.4)$$

donde $-\frac{M}{r}\kappa$ representa el término Newtoniano, $\frac{J^2}{2r^2}$ es el término centrífugo y $-\frac{MJ^2}{r^3}$ es un término adicional que domina sobre el término centrífugo para pequeños valores de r.

Para geodésicas nulas ($\kappa = 0$), el potencial es:

$$V(r) = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{MJ^2}{r^3} \qquad (6.5)$$

Esta función de potencial tiene un máximo en $r = 3M$, o restaurando *G* y *c,* en $r = \frac{3GM}{c^2}$, que corresponde a una órbita circular inestable de un rayo de luz alrededor del agujero negro.

Para geodésicas cuasi-temporales,

$$V(r) = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{MJ^2}{r^3} \qquad (6.6)$$

Donde *(6.6)* tiene un máximo en

$$r_1 = r_J\left[1-\left(1-3\frac{r_s}{r_J}\right)^{1/2}\right] \qquad (6.7)$$

y un mínimo en

$$r_2 = r_J\left[1+\left(1-3\frac{r_s}{r_J}\right)^{1/2}\right] \qquad (6.8)$$

donde $r_s = 2M$ y $r_J = J^2/r_s$. El valor más pequeño de r_2 se lo obtiene haciendo $r_J = 3r_s$ y es $r_{2\min} = 3r_s$. Es decir que la órbita circular estable más pequeña para una partícula alrededor de un agujero negro de Schwarzschild se encuentra a una distancia del centro del mismo igual a tres veces el radio de Schwarzschild. Reemplazando el valor de $r_{2\min}$ en (*6.3a*) con $\kappa = 1$, obtenemos para dicha órbita circular $\varepsilon^2 = 8/9$, por lo que $E = \left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} mc^2$ (restaurando c^2).

La energía liberada cuando material formando un disco de acreción alrededor del agujero negro cae hacia la mencionada órbita es: $\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^{1/2}\right)mc^2$, es decir aproximadamente el 5.72% de su energía en reposo.

Calculemos ahora la velocidad de una partícula de masa en reposo, *m*, en una órbita circular estable alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. Para dicha órbita, la métrica *(3.1)* se puede escribir (suponiendo que el movimiento es en el plano $\theta = \pi/2$):

$$c^2 = \gamma c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \qquad (6.9)$$

Si en la ecuación *(4.5)* hacemos $E = \left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} mc^2$, obtenemos $\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{2}$. Introduciendo dicho valor en *(6.9)*

y puesto que la velocidad de la partícula es $v = r\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)$, obtenemos

$$v = \frac{c}{\sqrt{3}} \qquad (6.10)$$

que es aproximadamente el 58% de la velocidad de la luz. El período orbital de la partícula medido por un observador local estacionario es

$$\tau = \frac{6\pi r_s}{v} = \frac{12\pi\sqrt{3}GM}{c^3} \qquad (6.11)$$

donde M es la masa del agujero negro. Para un agujero negro supermasivo con una masa igual a mil millones de veces la masa del Sol, el radio de Schwarzschild sería aproximadamente igual a 19.66 veces la distancia entre la Tierra y el Sol. El radio de la órbita circular estable más pequeña alrededor de dicho agujero equivaldría a unas 58.98 veces la distancia entre la Tierra y el Sol con un período orbital de 3.71 días. El tiempo coordenado correspondiente (medido por un observador muy alejado del agujero negro) sería: $t = (\sqrt{2})\,\tau = 5.25$ días.

7. Ecuación de desviación de la geodésica

i) Derivada absoluta o intrínseca

La derivada absoluta o intrínseca de un vector contravariante A^{α} se define [7]:

$$\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta\tau} \equiv A^{\alpha}_{,\beta}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = \left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\gamma}\right)\frac{dx^{\beta}}{d\tau} \qquad (7.1)$$

Donde τ es el tiempo propio.

Por otro lado, la segunda derivada absoluta o intrínseca del vector contravariante A^{α} está dada por la expresión:

$$\frac{\delta^2 A^{\alpha}}{\delta\tau^2} \equiv \frac{\delta}{\delta\tau}\left(\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta\tau}\right) = \frac{d^2A^{\alpha}}{d\tau^2} + \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)A^{\gamma}\left(\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\right) + 2\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\left(\frac{dA^{\gamma}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\gamma}\left(\frac{d^2x^{\beta}}{d\tau^2}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\rho}A^{\rho}\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\right) \qquad (7.2)$$

ii) Ecuación de desviación de la geodésica

Consideremos un vector ξ^{ν} en el espacio tiempo que conecta dos puntos ubicados en dos geodésicas muy próximas en x^{ν} y $x^{\nu}+\xi^{\nu}$. Para cada geodésica podemos escribir:

$$\frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}(x)\left(\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\right) = 0 \qquad (7.3)$$

$$\frac{d^2(x^{\nu}+\xi^{\nu})}{d\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}(x+\xi)\left(\frac{d(x+\xi)^{\lambda}}{d\tau}\right)\left(\frac{d(x+\xi)^{\rho}}{d\tau}\right) = 0 \qquad (7.4)$$

En primer orden en ξ^{ν}

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}(x+\xi) = \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}(x) + \frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}}{\partial x^{\sigma}}\xi^{\sigma} \qquad (7.5)$$

Introduciendo *(7.5)* en *(7.4)* tenemos en primer orden en ξ:

$$\frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2} + \frac{d^2\xi^{\nu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}(x)\left(\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\right) + 2\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}(x)\left(\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\right)\left(\frac{d\xi^{\rho}}{d\tau}\right) + \frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}}{\partial x^{\sigma}}\xi^{\sigma}\left(\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\right) = 0 \qquad (7.6)$$

Restando *(7.3)* de *(7.6)*

$$\frac{d^2\xi^{\nu}}{d\tau^2} + 2\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}(x)\left(\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\right)\left(\frac{d\xi^{\rho}}{d\tau}\right) + \frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}}{\partial x^{\sigma}}\xi^{\sigma}\left(\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\right) = 0 \qquad (7.7)$$

Usando la ecuación *(7.2)* , reemplazando $A \rightarrow \xi$

$$\frac{\delta^2\xi^{\nu}}{\delta\tau^2} = \frac{d^2\xi^{\nu}}{d\tau^2} + \frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)\xi^{\gamma}\left(\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\right) + 2\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\left(\frac{d\xi^{\rho}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\right) + \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}\xi^{\gamma}\left(\frac{d^2x^{\beta}}{d\tau^2}\right) + \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\rho}\xi^{\rho}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\right) \qquad (7.8)$$

Si en el segundo término del lado derecho de la ecuación *(7.8)* hacemos los siguientes cambios de índices: $\beta \to \lambda$, $\gamma \to \rho$ y $\mu \to \sigma$ e introducimos la ecuación *(7.7)* tenemos:

$$\frac{\delta^2 \xi^\nu}{\delta \tau^2} = -\frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho} \xi^\rho \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right) + \frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\rho}}{\partial x^\sigma}\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right)\xi^\rho \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right) + \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\xi^\gamma \left(\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}\right) + \Gamma^\nu_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\rho}\xi^\rho \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) \quad (7.9)$$

De la ecuación de la geodésica sabemos que

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma^\beta_{\lambda\rho}\left(\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\rho}{d\tau}\right)$$

por lo que *(7.9)* se puede escribir:

$$\frac{\delta^2 \xi^\nu}{\delta \tau^2} = \xi^\rho \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right)\left[\frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho} - \Gamma^\nu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\lambda\sigma} + \Gamma^\nu_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\lambda\rho}\right] \quad (7.10)$$

usando *(2.3)* obtenemos

$$\frac{\delta^2 \xi^\nu}{\delta \tau^2} = \xi^\rho \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right) R^\nu_{\lambda\sigma\rho} \quad (7.11)$$

como $R^\nu_{\lambda\sigma\rho} = -R^\nu_{\lambda\rho\sigma}$, y si en *(7.11)* cambiamos $\gamma \to \beta, \rho \to \gamma$ y $\sigma \to \mu$ obtenemos finalmente

$$\frac{\delta^2 \xi^\nu}{\delta \tau^2} + R^\nu_{\beta\gamma\mu}\xi^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (7.12)$$

A *(7.12)* se le conoce como ecuación de desviación de la geodésica. $R^\nu_{\beta\gamma\mu}$ es el tensor de Riemann-Christoffel de segunda especie. La expresión *(7.12)* nos da la aceleración relativa entre dos partículas moviéndose a lo largo de geodésicas próximas.

Consideremos un observador que caiga libremente desde el reposo, en dirección radial, hacia el horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild. Si caería desde un punto muy alejado con respecto a dicho agujero, entonces, la aceleración relativa de dos puntos del viajero (por ejemplo la rodilla y el corazón) se podría determinar usando la ecuación de desviación de la geodésica. Puesto que nosotros estamos interesados únicamente en la componente tangencial, podemos escribir:

$$\frac{\delta^2 \xi^2}{\delta \tau^2} + R^2_{020}\xi^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + R^2_{121}\xi^2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (7.13)$$

donde

$$R^2_{020} = \frac{\gamma r_s}{2r^3} \quad \text{y} \quad R^2_{121} = -\frac{r_s}{2r^3\gamma} \quad \text{y}$$

$$\gamma = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

Usando la ecuación *(4.5)* con $E = mc^2$ tenemos:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{1}{\gamma} \quad (7.14)$$

adicionalmente, la ecuación *(4.9)* se puede escribir

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2GM}{r} \quad (7.15)$$

de manera que la aceleración de marea es:

$$Q \equiv \frac{\left(\frac{\delta^2 \xi^2}{\delta \tau^2}\right)}{\xi^2} = -\frac{GM}{r^3} \quad (7.16)$$

Para un agujero negro con $M = 10\,M_\Theta$, a una distancia r = 1000 Km del centro del agujero negro, tendríamos

$$Q = -1327.3\frac{m/s^2}{m}$$

Esto significa que la aceleración relativa de dos puntos de un viajero separados una distancia de un metro sería de – 1327.3 m/s^2. Esta aceleración, es tan grande, que lo terminaría triturando.

8. Evaporación de un agujero negro

Al introducir la mecánica cuántica en la teoría de los agujeros negros, la entropía finita de un agujero negro, implica que dichos agujeros pueden crear y emitir partículas, antipartículas y radiación.

La temperatura de la radiación emitida por un agujero negro se puede estimar a partir del principio de incertidumbre de Heisenberg [6]. Consideremos un agujero negro de Schwarzschild (un agujero negro

esférico, desprovisto tanto de carga eléctrica como de movimiento de rotación). La posición de un fotón emitido desde la superficie del horizonte de sucesos del agujero negro tiene una incertidumbre del orden de $2\pi r_0$, donde $r_0 = 2GM/c^2$ es el radio de Schwarzschild. La incertidumbre en la cantidad de movimiento del fotón es

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{4\pi r_0} = \frac{\hbar c^2}{8\pi G M} \qquad (8.1)$$

donde $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.

$h = 6.626 \times 10^{-34}\ Js$ es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz, G es la constante de gravitación universal y M es la masa del agujero negro. La energía media debido a agitación térmica es $E \approx K_B T \approx \Delta p\, c$ (donde $K_B = 1.38 \times 10^{-23}\ J/°K$ es la constante de Boltzmann). Por lo tanto

$$\Delta p \approx \frac{K_B T}{c} \qquad (8.2)$$

De la ecuaciones (*8.1*) y (*8.2*) obtenemos

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi K_B G M} \qquad (8.3)$$

El cálculo exacto desarrollado por Stephen Hawking [8] produce el mismo resultado.

Introduciendo los valores de las constantes: $\hbar$, c, K_B, G en (*8.3*) obtenemos:

$$T = 6.1918 \times 10^{-8}\left(\frac{M_\Theta}{M}\right)\ °K \qquad (8.4)$$

donde M_Θ es la masa del Sol. Para un agujero negro con una masa $M = 10^{11}\ kg$ (cien millones de toneladas) la temperatura de la radiación emitida es $T = 1.23 \times 10^{12}\ °K$ (un billón de grados Kelvin). Por otro lado, si la masa del agujero negro es $M = 10^{12}\ kg$ (mil millones de toneladas), la temperatura de la radiación emitida sería $T = 1.23 \times 10^{11}\ °K$ (cien mil millones de grados Kelvin).

La rapidez a la cual el agujero negro pierde energía por radiación Hawking es:

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma A T^4 = -3.601 \times 10^{32} M^{-2}\ \frac{Joules}{segundo} \qquad (8.5)$$

Donde E representa la energía, t es el tiempo, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ W / m^2 °K$ es la constante de Stefan-Boltzmann, A es el área del horizonte de sucesos del agujero negro y T es la temperatura de la radiación emitida (ecuación (*8.4*)).

Las ecuaciones *(8.4)* y *(8.5)* nos dicen que pequeños agujeros negros tienen mayores temperaturas y radian su energía más rápidamente que agujeros negros de gran masa. En un agujero negro con una masa de $10^{12}\ kg$ (mil millones de toneladas), el ritmo de radiación de energía sería de 360.1 Megawatts. Si la masa del agujero negro es $10^{11}\ kg$ (cien millones de toneladas), el ritmo de radiación de energía sería 36010 Megawatts. En comparación, una gran central de energía nuclear, genera unos 1000 Megawatts de potencia.

El tiempo de vida de un agujero negro (τ), es decir el tiempo en el cual el agujero negro se habrá evaporado, se puede calcular integrando la ecuación (*8.5*). El resultado es:

$$\tau = \left(\frac{M}{1.08 \times 10^{11}\ kilogramos}\right)^3 \times 10^{10}\ años \qquad (8.6)$$

Por ejemplo, un agujero negro primario (agujeros formados no por el colapso de estrellas, sino por el colapso de regiones fuertemente comprimidas en el medio denso y caliente que existió después de la Gran Explosión) con una masa $M = 10^{11}\ kg$ se habrá evaporado aproximadamente en 10^{10} años. Esta es más o menos la edad del universo, por lo que deberíamos ser capaces de observar la explosión de agujeros negros primarios hoy en día. Un agujero negro supermasivo se evaporaría en 10^{95} años.

La entropía de un agujero negro está dada por la ecuación de Stephen Hawking y Jacob Bekenstein [9]:

$$S = \frac{A c^3}{4 G \hbar} \qquad (8.7)$$

donde A es el área de la superficie del horizonte de sucesos del agujero negro.

9. Agujeros negros cuánticos y aceleradores de partículas

Clásicamente, la masa del agujero negro más ligero que podría formarse se la puede obtener comparando su longitud de onda de Compton con su respectivo radio de Schwarzschild. La aplicabilidad de la Teoría General de la Relatividad exige que:

$$\lambda_{Compton} < r_S$$

es decir,

$$\frac{\hbar}{Mc} < \frac{GM}{c^2} \qquad (9.1)$$

donde M es la masa del objeto que colapsa. A partir de *(9.1)* podemos deducir

$$M > \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = M_{Pl} \qquad (9.2)$$

Donde M_{Pl} es la masa de Planck. $M_{Pl} = 1.22\times10^{19}\ GeV/c^2 \approx 2.2\times10^{-8}\ kg$.

En gravedad cuántica, el principio de incertidumbre de la mecánica cuántica se puede escribir[10]:

$$\Delta x_i \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_i}\left[1+\left(\alpha' l_{Pl}\frac{\Delta p_i}{\hbar}\right)^2\right] \qquad (9.3)$$

Donde Δx_i es la incertidumbre en la posición de la partícula en las direcciones x, y, z para i= 1, 2 y 3, respectivamente. Δp_i es es la incertidumbre en las cantidades de movimiento correspondientes,

$l_{Pl} = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} \approx 1.61\times10^{-35}$. m es la longitud de Planck, y finalmente α' es una constante sin dimensiones del orden de 1 que depende de los detalles de la teoría. Esta ecuación se puede derivar ya sea usando teoría de cuerdas, mecánica cuántica no conmutativa o consideraciones de longitud mínima.

Si despreciamos la longitud de Planck en la ecuación *(9.3)* , obtenemos la relación habitual del principio de incertidumbre: $\Delta x_i \Delta p_i \geq \hbar/2$. Derivando *(9.3)* con respecto a Δp_i obtenemos que $\Delta p_{i\ minimo} = \hbar/(\alpha' l_{Pl})$, de manera que el valor mínimo de Δx_i es $\Delta x_{i\ minimo} = \alpha' l_{Pl}$. Por lo tanto, la ecuación *(9.3)* implica una escala de longitud mínima

$$\Delta x_i \geq \Delta x_{i\ mínimo} = \alpha' l_{Pl} \qquad (9.4)$$

Este principio de incertidumbre modificado conduce a nuevas expresiones para la temperatura de la radiación emitida por un agujero negro y su tiempo de evaporación. Para un agujero negro de Schwarzschild en d dimensiones del espacio-tiempo, el radio de Schwarzschild correspondiente es:

$$r_S = \omega_d l_{Pl}\left(\frac{M}{M^*_{Pl}}\right)^{1/(d-3)} \qquad (9.5)$$

Donde M es la masa del agujero negro cuántico y ω_d está dado por la siguiente expresión:

$$\omega_d = \left\{16\pi/\left[(d-2)\Omega_{d-2}\right]\right\}^{1/(d-3)}$$

en la que Ω_{d-2} es el área de la hipersuperficie S^{d-2}. El principo de incertidumbre generalizado para un agujero negro de estas características es:

$$\Delta p = (2\hbar/\Delta x)\left[1+\left(1-\left(4l^2_{Pl}\alpha'^2/(\Delta x)^2\right)\right)^{1/2}\right]^{-1} \qquad (9.6)$$

Donde $\Delta x = 2Kr_S$ es la incertidumbre en la determinación de la posición de una partícula sin masa emitida desde el horizonte de sucesos del agujero negro, de Δp es la incertidumbre en el momento correspondiente, K es un factor de corrección de orden 1 que puede ser calculado a partir de la geometría esférica del horizonte de sucesos del agujero negro. Usando *(9.6)*, se puede calcular la temperatura de la radiación emitida por el agujero negro:

$$T = 2T_0\left[1+\left[1-\frac{\alpha^2}{\omega_d^2 m^{2/(d-3)}}\right]^{1/2}\right]^{-1} \qquad (9.7)$$

donde

$$T_0 = \left(\frac{d-3}{4\pi\omega_d}\right)M^*_{Pl}c^2 m^{1/(3-d)},\ m \equiv M/M^*_{Pl},$$

$\alpha = \alpha'/K$ es un factor adimensional de orden 1 y M^*_{Pl} es la escala de masa de Planck que en teorías con dimensiones adicionales suficientemente largas es del orden de 1 TeV.

Como resultado, la masa mínima que puede tener un agujero negro cuántico es [10]:

$$M_m = \frac{(d-2)}{8\Gamma((d-1)/2)}\left(\alpha\sqrt{\pi}\right)^{d-3} M^*_{Pl} \qquad (9.8)$$

Donde Γ es la función Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx (\mathrm{Re}(z)>0)$$

Así para $d = 10$ y $\alpha \approx 1$, la masa mínima sería M_m = 4.72 TeV. Dicho agujero negro tendría un radio de 10^{-19} metros y se evaporaría en 10^{-26} segundos. Un agujero negro de estas características podría ser observado en el LHC en el que la energía total disponible en el centro de masa para las colisiones entre los protones es de 14 TeV. Por otro lado, si $d = 10$ ψ $\alpha \approx 2$, entonces la masa mínima sería M_m = 604.16 TeV. En este caso, no se podría observar absolutamente nada en el LHC.

10. Conclusiones

Una de las más importantes y fascinantes predicciones de la Teoría General de la Relatividad es la existencia de agujeros negros.

En este artículo, hemos analizado lo que le sucedería a un observador al caer hacia el horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild. Calculamos la órbita circular estable más pequeña alrededor de dichos agujeros. Hemos estudiado la evaporación de los agujeros negros y la posible producción de agujeros negros cuánticos en aceleradores de partículas como el LHC.

A continuación hacemos un breve resumen de los resultados obtenidos:

Si una nave espacial cayera en el interior de un agujero negro formado por el colapso gravitacional de una estrella con una masa igual a 10 veces la del Sol, los viajeros a bordo de la nave notarían que después de atravesar el horizonte de sucesos, la nave alcanzaría el centro del agujero negro en un intervalo de tiempo muy corto: $4GM / 3c^3 = 6.6\times10^{-5}$ segundos (casi siete cienmilésimas de segundo), esto suponiendo que cae a partir del reposo desde una gran distancia con respecto al agujero negro. Sin embargo, para un observador muy alejado de éste, el viaje a través del horizonte de sucesos de la nave espacial se demoraría toda la eternidad. El horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild, representa, una superficie en la que el corrimiento hacia el rojo medido por un observador distante es infinito. En la práctica, sería imposible sobrevivir a tal viaje, pues la nave y sus ocupantes serían destruidos por el inmenso campo gravitacional del agujero negro. En efecto, la aceleración relativa de las partes del cuerpo de un viajero en caída libre hacia un agujero negro con las características descritas se puede calcular a partir de la ecuación de desviación de la geodésica. De acuerdo con esta ecuación, a una distancia de 1000 km del centro del agujero negro, dos puntos del viajero ubicados a una distancia de un metro (por ejemplo, una rodilla y el corazón) experimentarían una aceleración relativa de 1327.3 m/seg^2 debido a las mareas gravitacionales. Esta aceleración es tan grande, que lo terminaría triturando (comparen con el valor de la aceleración de la gravedad en el Ecuador: 9.8 m/seg^2). Como el radio de Schwarzschild del agujero negro es 30 km, el observador en caída libre, ni siquiera podría alcanzar con vida el horizonte de sucesos del agujero negro.

El radio de la órbita circular estable más pequeña alrededor de un agujero negro es tres veces el tamaño de su correspondiente radio de Schwarzschild. La energía liberada cuando material formando un disco de acreción alrededor del agujero negro cae hacia la mencionada órbita es aproximadamente el 5.72% de su energía en reposo. En comparación, la máxima energía liberada cuando el hidrógeno se quema en ^{56}Fe por fusión termonuclear, es 0.9% de su energía en reposo. Por lo tanto, la energía gravitacional liberada cuando material cae hacia la órbita circular estable más pequeña, es la más importante fuente de energía en los procesos estelares. En dicha órbita estable las partículas se mueven con una velocidad igual al 58% de la velocidad de la luz. Cuando nosotros tenemos un agujero negro en rotación, la energía liberada puede ser mucho mayor, alcanzando hasta un 42% de la energía en reposo en condiciones favorables [6]. Vale la pena mencionar que en un agujero negro provisto de movimiento de rotación, puede existir más de una superficie con corrimiento hacia el rojo infinito, así como también varios horizontes de sucesos.

Al introducir la mecánica cuántica, la entropía finita del agujero negro, implica que un agujero negro crea y emite partículas, antipartículas y radiación. Debido a un efecto muy similar al efecto túnel de la mecánica cuántica, un agujero negro podría evaporarse emitiendo radiación. Un agujero negro primario con una masa de cien millones de toneladas tardaría en evaporarse unos diez mil millones de años, que es aproximadamente la edad del universo. A un agujero negro formado por el colapso de una estrella le esperaría un destino similar, aunque tardaría en evaporarse mucho más: 10^{68} años o más. Un agujero negro supermasivo se evaporaría en 10^{95} años.

En teorías con dimensiones adicionales del espacio suficientemente largas (como la teoría de cuerdas y supercuerdas y teorías de Kaluza Klein), la producción de agujeros negros cuánticos en aceleradores de partículas como el LHC sería perfectamente factible. Dichos agujeros tendrían masas en reposo del orden de unos pocos TeV, con un radio de 10^{-19} metros, aproximadamente. Tardarían en evaporarse unos 10^{-26} segundos. Debido a su efímera existencia, aparecerían en los detectores de partículas como brevísimos destellos de radiación. El descubrimiento de agujeros negros con estas características abriría nuevas fronteras en la física, que nos permitirían entender, con mayor claridad, la estructura del universo, sobre todo a escala microscópica.

Referencias bibliográficas

1. Hawking, S.W. 1988. Historia del Tiempo. Círculo de Lectores (Título original, A Brief History of Time. Bantam Books. NY, NY).
2. Schutz, B.F. 2005. A first course in general relativity, seventeenth printing, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
3. (a) Ohanian, H.C. 1976. Gravitation and Spacetime, Vol. 160. W.W. Norton & Company, Inc. NY, NY.
   (b) Misner, C.W.; Thorne, K.S. and J. Wheeler, J.A. 1973. Gravitation, W. H. Freeman & Company. NY, NY.
   (c) Weinberg, S. 1973. Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons, Inc. NY, NY.

4. Particle Data Group. 2004, 2006. Particle Physics Booklet.
5. ‘t Hooft, G. 2001. Introduction to General Relativity, Rinton Press Inc., Princeton, NJ.
6. Kenyon, I.R. 1996. General Relativity, Oxford University Press, Oxford, UK.
7. Sokolnikoff, I.S. 1979. Análisis Tensorial, segunda edición, INDEX, Madrid- Barcelona. Spain.
8. (a) Hawking, S.W. 1975. Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math Phys*.,43, 199-220.
   (b) Hawking, S.W. and Penrose, R. 1996. The Nature of Space and Time, Princeton University Press, Princeton, NJ.
9. Horowitz, G.T. and Teukolsky, S.A. 1999. Black Holes. *Rev. Mod. Phys.* 71, S180.
10. (a) Carr, B.J. and Giddings, S.B. 2005. Quantum Black Holes. *Scientific American*, May. p.48-55.
   (b) Cavaglia, M.; Das, S. and Maartens, R. 2003. Will we observe black holes at the LHC? *Classical and Quantum Gravity.* 20, 15. L205-L212.
   (c) Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. 2002. Large extra dimensions: a new arena for particle physics, *Physics Today,* February. p.35-40.